Свойства определенного интеграла

1) Если $f\in R[a,b]$, $k\in\mathbb{R}$, то $(k\cdot f)\in R[a,b]$ и
$$\int_a^b k f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Д-во: следует из того, что $\sum_{k=1}^n k\cdot f(\xi_k)\Delta x_k = k\cdot\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$

2) Если $f,g\in R[a,b]$, то $(f+g)\in R[a,b]$ и
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Д-во: аналогично.

1), 2) — линейность

Тогда $\underbrace{S(T'')-s(T'')}_{\sum_{k=l}^{m+1}\omega_k\Delta x_k} \le \underbrace{S(T')-s(T')}_{\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k} \le S(T)-s(T)<\varepsilon$

T' - измельчение T

$\Rightarrow f\in R[c,d]$. ч.т.д.

5) (аддитивность). Если $f\in R[a,c]$ и $f\in R[c,b]$, то $f\in R[a,b]$, причем
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Перечислим свойства интеграла, связанные с неравенствами:

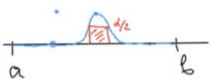
1) Пусть $f\in R[a,b]$ и $f(x)\ge 0$ (≤ 0) $\forall x\in[a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$ (≤ 0).

Д-во: проведем для случая "$\ge$". Если $f(x)\ge 0$ на $[a,b]$, то $\forall T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ — разбиения $[a,b]$: $m_k\ge 0$, $k=1,\dots,n \Rightarrow s(T)\ge 0$. Поскольку $s(T)\le\int_a^b f(x)\,dx\le S(T)$, то $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$. ч.т.д.

$\exists\delta>0$, т.ч. $\underbrace{|f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon \quad \forall x\in[x_0-\delta;x_0+\delta]\cap[a,b]}$

$\mathcal{Y}$ - промежуток длины $\ge\delta$

$$\Downarrow$$
$$f(x)\ge f(x_0)-\varepsilon=\frac{\alpha}{2}$$



Положим $g(x)=\begin{cases}\alpha/2, & x\in\mathcal{Y}\\ 0, & x\in[a,b]\setminus\mathcal{Y}\end{cases}$

Тогда $f(x)\ge g(x)$ $\forall x\in[a,b]\Rightarrow$
$$\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx\ge\frac{\alpha}{2}\cdot\delta>0.$$
ч.т.д.

4) Если $f\in C[a,b]$, $f(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]$ и $\int_a^b f(x)\,dx=0$, то $f(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$.

5) Если $f\in R[a,b]$, то $|f|\in R[a,b]$, причем
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Д-во: ф-ция $f\in R[a,b]$, $g(y)=|y|\in Lip[m,M]$ $\Rightarrow \underbrace{g(f)}_{|f|}\in R[a,b]$. Далее,
$$-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)| \quad \forall x\in[a,b]$$
$$\Rightarrow -\underbrace{\int_a^b |f(x)|\,dx}_{A}\le\int_a^b f(x)\,dx\le\underbrace{\int_a^b |f(x)|\,dx}_{A}$$
$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le A=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$
ч.т.д.

Замечание: из интегр-ти $|f|$ не следует, вообще говоря, инт-ть f. Например: $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

3) Если $f,g\in R[a,b]$, то $(f\cdot g)\in R[a,b]$.

Д-во: Пусть $f\in R[a,b]$. Тогда $\overset{g(f)}{f^2}\in R[a,b]$, т.к. ф-ция $g(y)=y^2\in Lip[m,M]$ $\quad f:[a,b]\to[m,M]$

Отсюда: $f\cdot g=\frac14\left((f+g)^2-(f-g)^2\right)\in R[a,b]$. ч.т.д.

4) Если $f\in R[a,b]$, $a\le c<d\le b$, то $f\in R[c,d]$.

Д-во: Возьмем $\varepsilon>0$. Пусть $T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ — разбиение $[a,b]$, т.ч. $S(T)-s(T)<\varepsilon$. Обозначим $T'=T\cup\{c;d\}$, пусть $x_{l-1}\le c<x_l<\dots<x_m<d\le x_{m+1}$. Обозначим $T''=\{c,x_l,\dots,x_m,d\}$ — разбиение $[c,d]$.

Д-во: Возьмем $\varepsilon>0$. $\exists T_1$ — разб-е $[a,c]$: $S(T_1)-s(T_1)<\varepsilon/2$. $\exists T_2$ — разбиение $[c,b]$: $S(T_2)-s(T_2)<\varepsilon/2$. Тогда $T=T_1\cup T_2$ — разбиение $[a,b]$; $S(T)-s(T)<\varepsilon\Rightarrow f\in R[a,b]$.

Далее, пусть T — разб-е $[a,b]$, т.ч. $c\in T$ $(c=x_m)$.

Тогда $\underbrace{\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot\Delta x_k}_{\Delta_T\to 0:\ \int_a^b f(x)\,dx} = \underbrace{\sum_{k=1}^m f(\xi_k)\cdot\Delta x_k}_{\int_a^c f(x)\,dx} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^n f(\xi_k)\Delta x_k}_{\int_c^b f(x)\,dx}$ ч.т.д.

2) $f,g\in R[a,b]$; $f(x)\ge g(x)$ $\forall x\in[a,b]\Rightarrow$
$$\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx.$$

Д-во: $f(x)-g(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]\Rightarrow \underbrace{\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx}_{\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx}\ge 0$ ч.т.д.

3) Пусть $f\in R[a,b]$; $f(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]$. Если f непр. в точке x_0 такой, что $f(x_0)>0$, то
$$\int_a^b f(x)\,dx>0.$$

Д-во: Пусть $f(x_0)=\alpha>0$. Положим $\varepsilon=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$

Д-во: Предположим, что $f(x_0)>0$ для нек-рого $x_0\in[a,b]$. Поскольку f непр. на $[a,b]$, то она непр. в точке $x_0\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx>0$?! $\Rightarrow f\equiv 0$. ч.т.д.

Пример: $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1;0)\cup(0;1]\\ 1, & x=0\end{cases}\in R[-1,1]$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$, хотя $f\not\equiv 0$.

Т.1 (1-я теорема о среднем). Пусть $f,g\in R[a,b]$; $g(x)\ge 0$ (≤ 0) $\forall x\in[a,b]$. Обозначим $M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $m=\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$. Тогда $\exists\mu\in[m,M]$:
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\cdot\int_a^b g(x)\,dx. \quad (1)$$
Если к тому же $f\in C[a,b]$, то $\exists\xi\in[a,b]$:
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx. \quad (2)$$

Д-во: Пусть сначала $g(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]$. Поскольку $m\le f(x)\le M$ $\forall x\in[a,b]$, то
$$m\cdot g(x)\le f(x)g(x)\le M\cdot g(x)\quad\forall x\in[a,b]$$
$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b m g(x)\,dx}_{m\int_a^b g(x)\,dx}\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le\underbrace{\int_a^b M g(x)\,dx}_{M\cdot\int_a^b g(x)\,dx} \quad (*)$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx=0$, то левая и правая части $(*)=0\Rightarrow$ средняя $=0$. Тогда ф-ла (1) верна $\forall\mu$.

Пусть $\int_a^b g(x)\,dx>0$. Разделим на него нер-во $(*)$: $m\le\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}=:\mu\le M$

Если $g(x) \le 0 \ \forall x \in [a,b]$, то умножим обе части (1) на минус единицу и применим доказанное выше к ф-ции $\tilde{g}(x) = -g(x)$.

Если $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$, т.ч. $f(\xi) = \mu$ (прох-е непр. ф-ции через промежут. знач-я) $\Rightarrow$ получаем соотн-е (2). ч.т.д.

Следствие: Если $f \in R[a,b]$, то $\exists \mu \in [m, M]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a). \quad (3)$$

Если к тому же $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b-a). \quad (4)$$

Т.3 (2-я теорема о средних). Пусть $f, g \in R[a,b]$.

1) Если $g(x) \ge 0$ и не возрастает на $[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

2) Если $g \ge 0$ и $\nearrow$ на $[a,b]$, то $\exists \xi' \in [a,b]$: $\int_a^b f(x) g(x)\,dx = g(b) \int_{\xi'}^b f(x)\,dx$.

3) Если g монотонна на $[a,b]$, то $\exists \xi'' \in [a,b]$: $\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = g(a) \int_a^{\xi''} f(x)\,dx + g(b) \int_{\xi''}^b f(x)\,dx$